2018年　東大数学　理系第2問

(1)

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\dfrac{{}_{2n+1}C_n}{n!}}{\dfrac{{}_{2n-1}C_{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{\dfrac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} \times \dfrac{1}{n!}}{\dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!} \times \dfrac{1}{(n-1)!}}$$

$$= \frac{\overset{(2n+1)(2n)}{\cancel{(2n+1)!}} \times \cancel{n!} \times \cancel{(n-1)!} \times \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(2n-1)!} \times \cancel{n!} \times \underset{(n+1)\times n}{\cancel{(n+1)!}} \times \cancel{n!}\ n}$$

$$= \frac{(2n+1) \times 2\cancel{n}}{(n+1) \times n \times \cancel{n}}$$

$$= \frac{2(2n+1)}{n(n+1)}$$

ここまでは計算のみ
次に既約分数かどうかは調べる。

ここで、$2n+1$ を n で割ると

$2n+1 = 2 \times n + 1$ なので、

$2n+1$ と n の最大公約数は

n と 1 の最大公約数、つまり 1 である。

よって $2n+1$ と n は互いに素である。

また　$2n+1$ を $n+1$ で割ると

$2n+1 = (n+1) \times 1 + n$

$n+1$ を n で割ると

$n+1 = n \times 1 + 1$ なので、

$2n+1$ と $n+1$ の最大公約数は

$n+1$ と n の最大公約数と等しく、また

n と 1 の最大公約数と等しい。

つまり 1 である。

以上、ユークリッドの互除法により

$2n+1$ と $n+1$、$2n+1$ と n は互いに素である。

また、$\dfrac{2(2n+1)}{n(n+1)}$ において、$n(n+1)$ は連続2整数の積

なので、偶数である。

$\dfrac{2n+1}{\frac{n(n+1)}{2}}$ とすると、$\dfrac{n(n+1)}{2}$ は整数であり、

$2n+1$ と $\dfrac{n(n+1)}{2}$ は互いに素。

よって、$p_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$　　$q_n = 2n+1$

(2) $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ を解くと、$\dfrac{2(2n+1)}{n(n+1)} < 1 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 2 > 0$

$\Leftrightarrow n < \underset{負}{\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}},\ \underset{3\sim4くらい}{\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}} < n$

n は整数なので、$n = 4, 5, 6 \cdots$

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow a_n < a_{n-1}$ をみたすのが、$n = 4, 5, 6 \cdots$

なので、

$a_3 > a_4 > a_5 > \cdots$ となる。

a_3 以降は単調減少

また、$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow a_n > a_{n-1}$ を解くと、$\dfrac{3-\sqrt{17}}{2} < n < \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$

つまり　$n = 1, 2, 3$ のみなので、

$a_1 < a_2 < a_3$ となる。

単調減少なので、1より小さくなるところを探す。

以上より　$a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5 > \cdots$

また、$a_1 = \dfrac{{}_3C_1}{1!} = 3$　　$a_2 = \dfrac{{}_5C_2}{2!} = 5$　　$a_3 = \dfrac{{}_7C_3}{3!} = \dfrac{35}{6}$

$a_4 = \dfrac{{}_9C_4}{4!} = \dfrac{21}{4}$　　$a_5 = \dfrac{{}_{11}C_5}{5!} = \dfrac{77}{20}$　　$a_6 = \dfrac{{}_{13}C_6}{6!} = \dfrac{143}{60}$

$a_7 = \dfrac{{}_{15}C_7}{7!} = \dfrac{143}{112} > 1$　　$a_8 = \dfrac{{}_{17}C_8}{8!} = \dfrac{2431}{4032} < 1$

よって、$\underset{整数}{a_1} < \underset{整数}{a_2} < \underbrace{a_3 > a_4 > \cdots a_7}_{整数でない} > 1 > \underbrace{a_8 > \cdots}_{1より小さいので整数の可能性なし}$

以上より　a_1 と a_2 の2整数なので、

$n = 1, 2$

東大合格 敬天塾　©敬天塾　著作権者に無断で文章や画像等の著作物の情報を転載することは、法律で禁止されています。